Reti a *Π* (o a *triangolo*) e a *T* (o a *stella*) per modellare reti a 2 porte passive a singolo riferimento.

Riflessione 11/15
Roberto Roncella

Premessa

Accade spesso, analizzando circuiti lineari, di trovarsi di fronte sistemi a 2 porte passivi, con un singolo potenziale di riferimento (*single ended*), descritti da una matrice simmetrica di qualche tipo.
Normalmente si possono valutare, a piacere, i parametri *f*, *h*, *g* oppure *r* del circuito a 2 porte e, a seconda dei casi, usare i corrispondenti modelli di amplificatore per analizzare il circuito complessivo.
In altri casi può fare comodo ricondurre la rete a una configurazione nota di impedenze opportune, facilmente interpretabile e analizzabile: le due configurazioni a *Π* e a *T* rispondono a questo requisito. Si può dimostrare che è sempre possibile modellare una rete a 2 porte passiva (con matrice simmetrica) con una rete a *Π* oppure a *T* ed è facile passare da una delle due configuarazioni all'altra.
In elettrotecnica, normalmente questi passaggi sono definiti trasformazioni *stella-triangolo* e *triangolo-stella*.

Metodologia

- Descrivere una rete a *T* come amplificatore di tensione[1].
- Invertire il problema e trovare le resistenze del *T* in funzione dei parametri *f*.
- Descrivere una rete a *Π* come amplificatore di tensione.
- Invertire il problema anche in questo caso.
- Trasformare un modello nell'altro.

La rete a T come amplificatore di tensione

In figura 1 è mostrata la rete di partenza

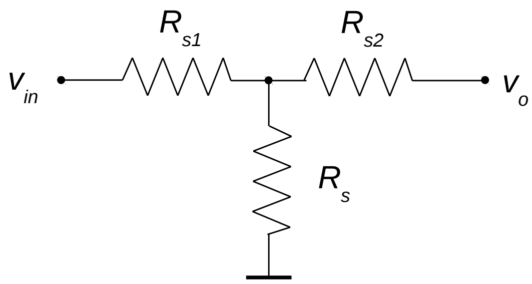

Figura 1: Rete a *T*.

I parametri *f* si ricavano in modo diretto. Si ha

$$f_i = \left.\frac{i_i}{v_i}\right|_{i_o=0} = \frac{1}{R_{s1}+R_s} \quad (1)$$

[1]Si potrebbe usare in modo equivalente qualsiasi altro tipo di amplificatore.

$$f_o = \left.\frac{v_o}{i_o}\right|_{v_i=0} = R_{s2} + \frac{R_{s1} R_s}{R_{s1} + R_s} \tag{2}$$

$$f_f = \left.\frac{v_o}{v_i}\right|_{i_o=0} = \frac{R_s}{R_{s1} + R_s} \tag{3}$$

$$f_r = \left.\frac{i_i}{i_o}\right|_{v_i=0} = f_f \tag{4}$$

Si possono invertire le relazioni trovate e individuare il valore delle resistenze del modello a *T* a partire dai parametri dell'amplificatore di tensione.
Dalla (3) e dalla (1), dividendo membro a membro, si ottiene:

$$R_s = \frac{f_f}{f_i} \tag{5}$$

Dalla (1), utilizzando il precendente risultato si ha:

$$R_{s1} = \frac{1 - f_f}{f_i} \tag{6}$$

E infine dalla (2), sottraendo il termine dipendente soltanto dai valori già determinati:

$$R_{s2} = f_o - f_f \frac{1 - f_f}{f_i} \tag{7}$$

La rete a Π come amplificatore di tensione

In figura 2 è mostrata la rete di partenza

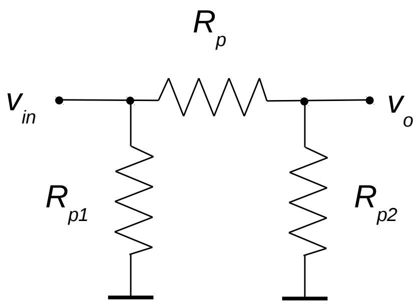

Figura 2: Rete a *Π*.

Anche in questo caso i parametri *f* si ricavano in modo abbastanza diretto. Conviene ricavare le espressioni anche rispetto alla conduttanza dei 3 elementi che compongono il circuito. Si ha

$$f_i = \left.\frac{i_i}{v_i}\right|_{i_o=0} = \frac{1}{R_{p1}} + \frac{1}{R_p + R_{p2}} = G_{p1} + \frac{G_{p2} G_p}{G_{p2} + G_p} \tag{8}$$

$$f_o = \left.\frac{v_o}{i_o}\right|_{v_i=0} = \frac{1}{\frac{1}{R_{p2}} + \frac{1}{R_p}} = \frac{R_{p2} R_p}{R_p + R_{p2}} = \frac{1}{G_{p2} + G_p} \tag{9}$$

$$f_f = \left.\frac{v_o}{v_i}\right|_{i_o=0} = \frac{R_{p2}}{R_p + R_{p2}} = \frac{G_p}{G_{p2} + G_p} \tag{10}$$

$$f_r = \left.\frac{i_i}{v_o}\right|_{v_i=0} = f_f \tag{11}$$

È interessante osservare che, formalmente, le espressioni trovate nel caso del circuito a *Π* usando le conduttanze, sono identiche a quelle del circuito a *T* usando le resistenze, a meno di una permutazione tra f_i e f_o e considerando come elementi corrispondenti R_s e G_p, R_{s1} e G_{p2} e infine R_{s2} e G_{p1}.
Si può sfruttare questa proprietà per trovare subito nel circuito a *Π* il valore delle conduttanze in funzione di quello dei parametri dell'amplificatore di tensione.

$$G_p = \frac{f_f}{f_o} \tag{12}$$

$$G_{p2} = \frac{1 - f_f}{f_o} \tag{13}$$

$$G_{p1} = f_i - f_f \frac{1 - f_f}{f_o} \tag{14}$$

Per ottenere i valori delle resistenze nel modello a *Π* è sufficiente invertire le espressioni appena trovate (12)-(14):

$$R_p = \frac{f_o}{f_f} \tag{15}$$

$$R_{p2} = \frac{f_o}{1 - f_f} \tag{16}$$

$$R_{p1} = \frac{1}{f_i - f_f \frac{1 - f_f}{f_o}} = \frac{f_o}{f_i f_o - f_f (1 - f_f)} \tag{17}$$

Equivalenza tra rete a T e rete a Π

Ora è facile vedere che uno stesso amplificatore di tensione può essere modellato secondo le due topologie, che quindi si troverranno a essere equivalenti tra loro.
Esaminiamo i parametri della rete a *Π* in funzione di quelli a *T*.

$$R_p = \frac{f_o}{f_f} = \frac{R_{s2} + \frac{R_{s1} R_s}{R_{s1} + R_s}}{\frac{R_s}{R_{s1} + R_s}} = R_{s1} + R_{s2} + \frac{R_{s1} R_{s2}}{R_s} \tag{18}$$

$$R_{p2} = \frac{f_o}{1 - f_f} = \frac{R_{s2} + \frac{R_{s1} R_s}{R_{s1} + R_s}}{\frac{R_{s1}}{R_{s1} + R_s}} = R_{s2} + R_s + \frac{R_{s2} R_s}{R_{s1}} \tag{19}$$

$$R_{p1}=\frac{f_o}{f_i f_o - f_f(1-f_f)}=\frac{R_{s2}+\frac{R_{s1}R_s}{R_{s1}+R_s}}{\frac{1}{R_{s1}+R_s}\left(R_{s2}+\frac{R_{s1}R_s}{R_{s1}+R_s}\right)-\frac{R_s}{R_{s1}+R_s}\frac{R_{s1}}{R_{s1}+R_s}}=$$

$$=\frac{(R_{s2}R_{s1}+R_{s2}R_s+R_{s1}R_s)(R_{s1}+R_s)}{R_{s2}R_{s1}+R_{s2}R_s+R_{s1}R_s-R_{s1}R_s}=R_{s1}+R_s+\frac{R_{s1}R_s}{R_{s2}} \tag{20}$$

Si osserva che, come ci si poteva aspettare, le espressioni (18)-(20) sono invarianti rispetto a una permutazione degli elementi della rete. Infatti ciò corrisponde a considerare come riferimento uno dei rimanenti due nodi.
Sulla base di questa osservazione, l'espressione della trasformazione stella-triangolo può essere descritta nel modo seguente:

La resistenza di un lato in una configurazione a triangolo (*Π*) si ottiene sommando le due resistenze della stella (*T*) connesse agli stessi lati, con l'aggiunta di una terza resistenza pari al prodotto delle due diviso per la terza.

Analogamente si procede per determinare le relazioni di equivalenza tra rete a *Π* e rete a *T*. Se in questo caso andiamo a determinare le conduttanze del circuito a t troviamo

$$G_s=\frac{f_i}{f_f} \tag{21}$$

$$G_{s1}=\frac{f_i}{1-f_f} \tag{22}$$

$$G_{s2}=\frac{1}{f_o-f_f\frac{1-f_f}{f_i}}=\frac{f_i}{f_i f_o-f_f(1-f_f)} \tag{23}$$

Si tratta delle stesse espressioni delle equivalenze del caso precedente, con f_i scambiato con f_o. Sostituendo ai parametri l'espressione in funzione delle conduttanze del modello a *Π*, otteniamo esattamente le stesse espressioni in cui le conduttanze prendono il posto delle resistenze. In particolare:

$$G_s=G_{p1}+G_{p2}+\frac{G_{p1}G_{p2}}{G_p} \tag{24}$$

$$G_{s1}=G_{p1}+G_p+\frac{G_{p1}G_p}{G_{p2}} \tag{25}$$

$$G_{s2}=G_{p2}+G_p+\frac{G_{p2}G_p}{G_{p1}} \tag{26}$$

Quindi anche in questo caso si può formulare l'equivalenza nel modo seguente:

La conduttanza tra un nodo e il centro in una configurazione a stella (*T*) si ottiene sommando le due conduttanze del triangolo (*Π*) connesse allo stesso nodo, con l'aggiunta di una terza conduttanza pari al prodotto delle due diviso per la terza.